**2023~2024学年第一学期高三年级期末学业诊断**

**数学试卷**

**（考试时间：上午8:00—10:00）**

**说明：本试卷为闭卷笔答，答题时间120分钟，满分150分.**

**一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）**

1. 已知集合，，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】利用一元二次不等式的解法及指数函数的单调性求得集合，再利用交集的概念计算即可.

【详解】由题意可知，，即，

所以.

故选：C

2. 已知复数满足，则在复平面内对应的点的坐标为（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】利用复数的除法求出，由几何意义求在复平面内对应的点的坐标.

【详解】复数满足，则，

所以在复平面内对应的点的坐标为.

故选：B

3. 圆圆心坐标为（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】将圆的一般方程转化为标准方程，从而求得圆心坐标.

【详解】圆可化为，

所以圆心坐标为.

故选：D

4. 第19届亚运会于2023年9月23日至10月8日在杭州等城市成功举办.杭州亚运会期间，甲、乙等4名志愿者要到游泳、射击、体操三个场地进行志愿服务，每名志愿者只去一个场地，每个场地至少一名志愿者，若甲不去游泳场地，则不同的安排方法种数为（ ）

A. 18 B. 24 C. 32 D. 36

【答案】B

【解析】

【分析】分游泳场有2名志愿者和1名志愿者两种情况讨论，然后利用分类加法原理求解即可.

【详解】先安排游泳场地的志愿者，在除去甲的另三人中选择，再安排射击和体操场地的志愿者.

当游泳场地安排2人时，则不同的安排方法有种，

当游泳场地安排1人时，则不同的安排方法有种，

由分类加法原理可知共有种.

故选：B.

5. 已知，，且，，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

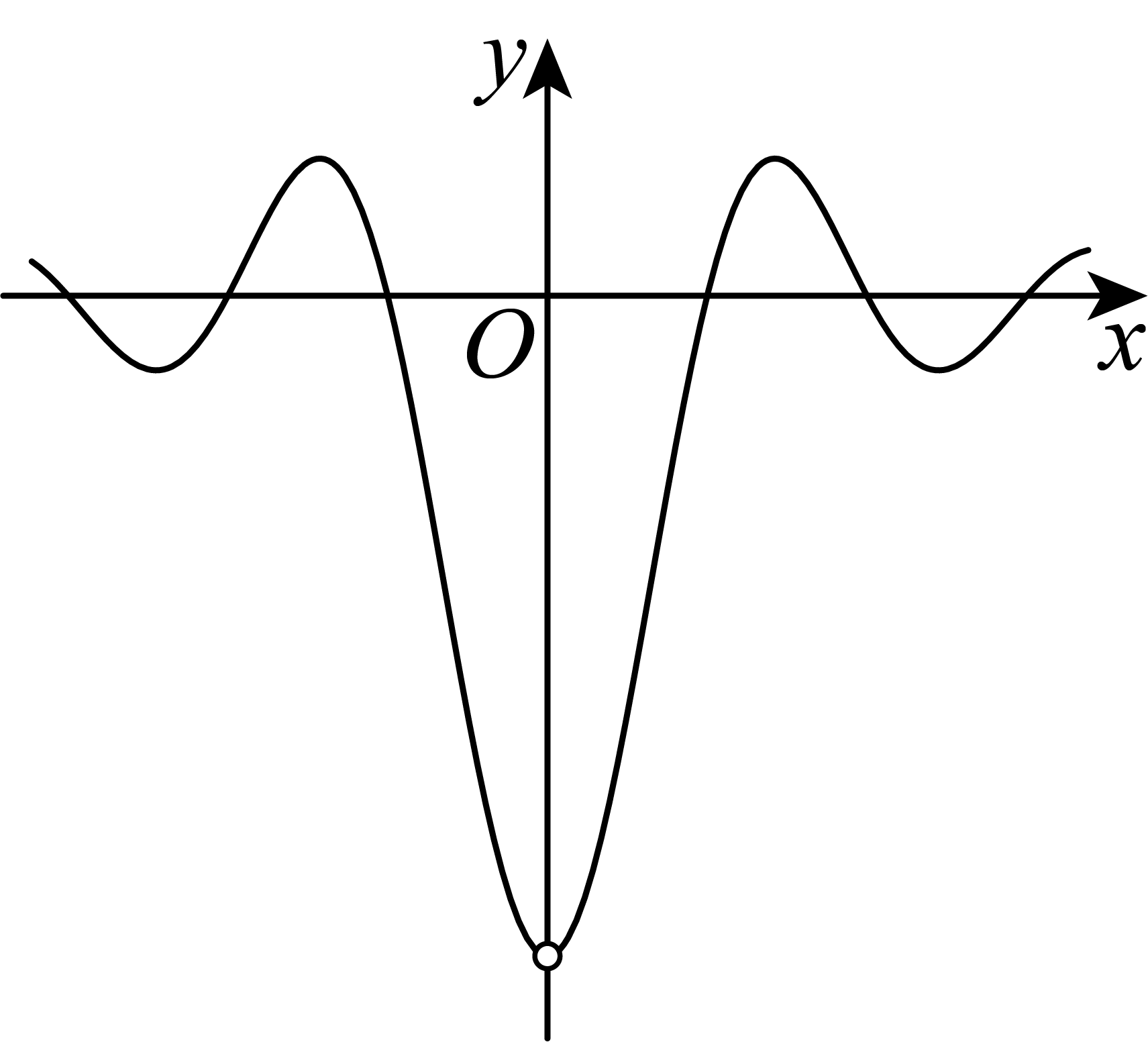
【分析】求得，然后结合角范围可得．

详解】由已知，

，∴．

故选：C．

6. 如图是函数的部分图象，则的解析式为（ ）



A.  B. 

C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】利用函数的奇偶性及函数值符号判定选项即可.

【详解】由图象可知函数为偶函数，且，

四个选项函数的定义域均为，

对于A项，，即为偶函数，

而，故A错误；

对于B、D项，，

，显然两项均为奇函数，故B、D错误；

对于C项，，即为偶函数，

而，故C正确.

故选：C

7. 已知椭圆的左、右焦点分别为，，点为上异于长轴端点的任意一点，的角平分线交线段于点，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】根据三角形平分线性质求得，利用定义及比例即可求解.

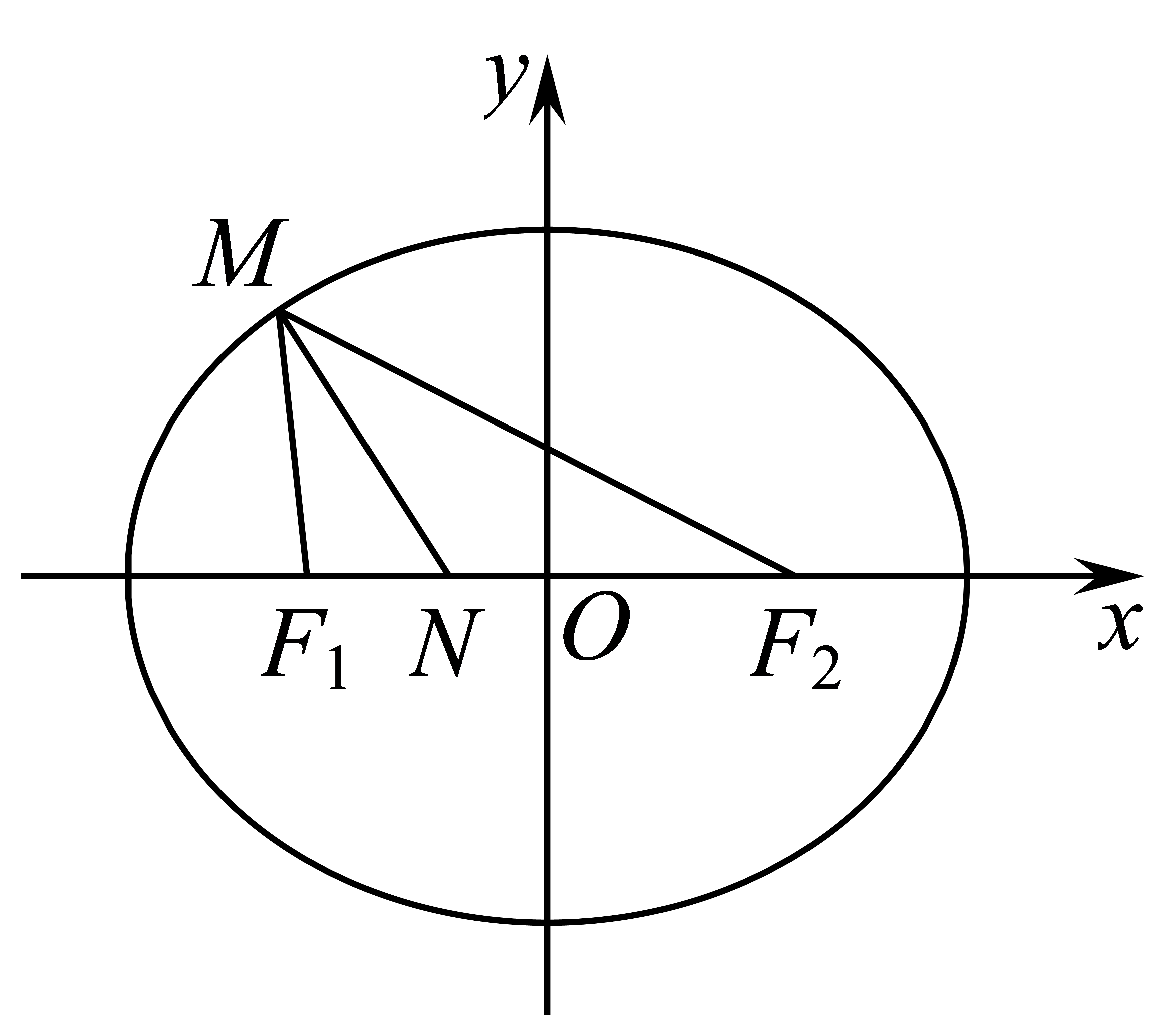
【详解】因为的角平分线交线段于点，

所以，

所以由正弦定理得，，

又因为，，

所以，即，不妨设，如图：



则，解得，

所以，

由题意，，所以，即.

故选：A

8. 若实数，，满足，，，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】利用对数函数的性质可判定，构造函数，利用导数研究其单调性可判定.

【详解】因为，利用换底公式可知，

构造函数，

显然时，，则在上单调递增，

时，，则在上单调递减，

所以由，即，

所以，综上.

故选：A

【点睛】难点点睛：观察式子发现利用对数函数的性质可判定，即底数大于1时，底数越大图象在第一象限内越平缓，步骤上可以由换底公式计算；对于后两项对比可以构造，通过其单调性进行对比即可.

**二、选择题（本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分）**

9. 已知数列中，，，数列的前项和为，则下列结论正确的是（ ）

A. 是等比数列 B. 

C.  D. 

【答案】BD

【解析】

【分析】利用等差数列定义判断A；求出通项公式判断B、C；利用分组求和法判断D.

【详解】由得，

又，

所以是以为首项，以2为公比的等比数列，

则，即，

，，，显然，

所以不是等比数列，故A错；

，故B对；

，故C错；

，故D对

故选：BD

10. 已知函数，则下列结论正确的是（ ）

A. 

B. 的图象关于点对称

C. 在区间上单调递增

D. 将的图象先向左平移个单位长度，再向下平移个单位长度后得到的函数图象关于原点对称

【答案】AC

【解析】

【分析】利用三角恒等变换化简函数，再结合正弦函数图象与性质逐项判断即得.

【详解】依题意，函数，

对于A，，A正确；

对于B，由，得的图象关于点对称，B错误；

对于C，当时，，因此在区间上单调递增，C正确；

对于D，将的图象向左平移个单位长度，再向下平移个单位长度后得到的函数的图象，其关于原点不对称，D错误.

故选：AC

11. 已知函数，若方程有四个不同的实数解，，，，且满足，则下列结论正确的是（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】ACD

【解析】

【分析】作出函数的图象和直线后直接判断A，由图象确定的关系及范围，然后利用对勾函数性质判断BC，结合二次函数性质判断D．

【详解】作出函数的图象，，再作出直线，如图，由得，

由对称性得，且，，

，因此，A正确；

，当且仅当时等号成立，

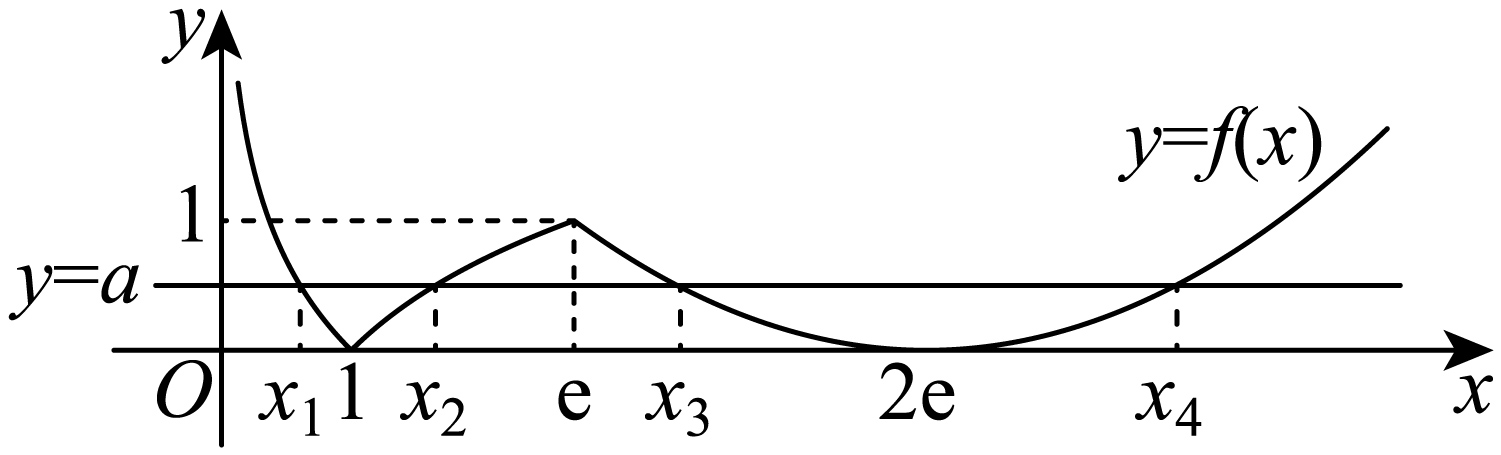
又时，，时，，

因此由对勾函数性质可得，B错；

同理由对勾函数性质得，因此，C正确；

因为，则，D正确．

故选：ACD．



12. 在棱长为1的正方体中，为线段的中点，点和分别满足，，其中，，则下列结论正确的是（ ）

A. 当时，三棱锥的体积为定值

B. 当时，四棱锥的外接球的表面积是

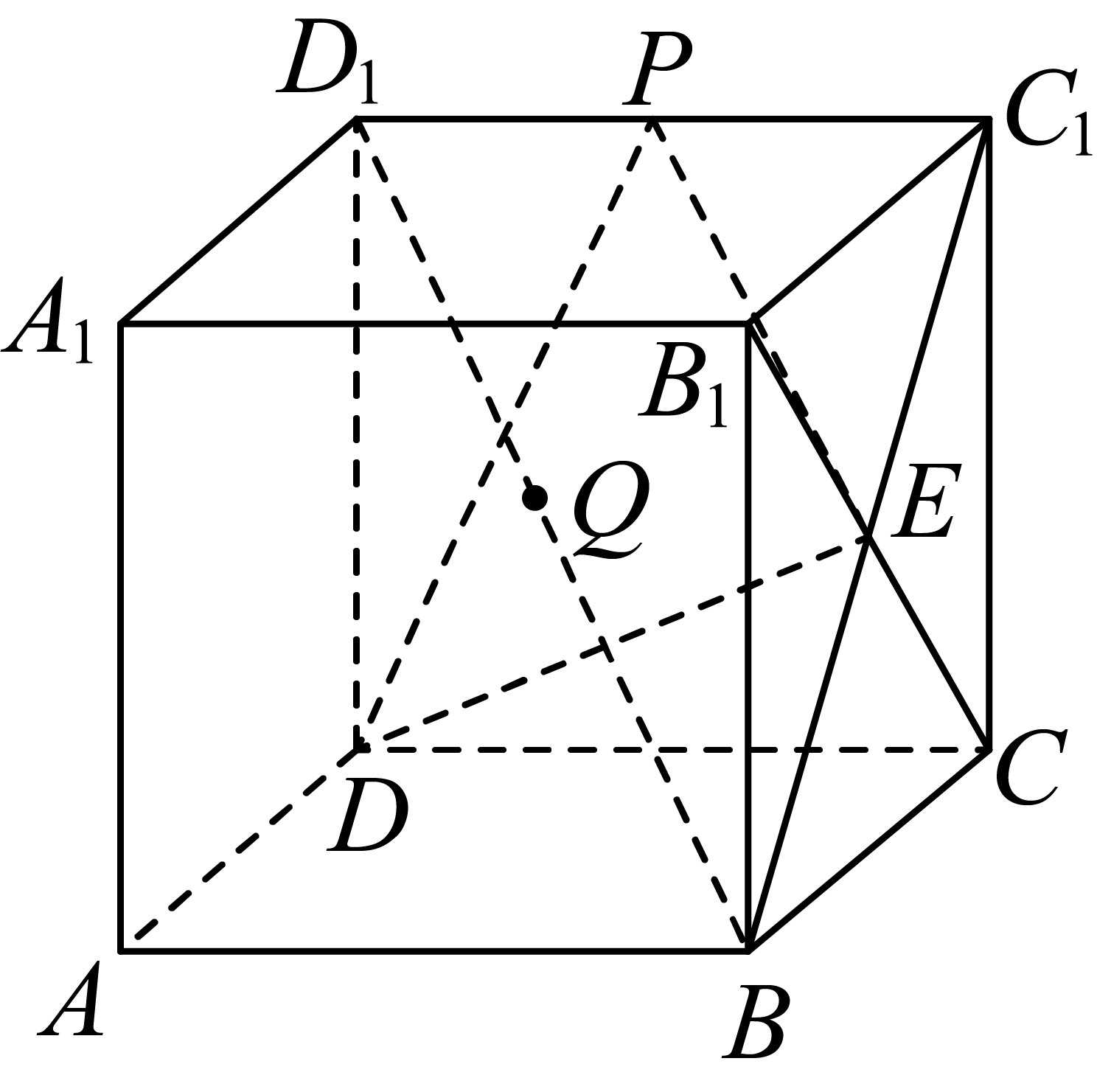
C. 当时，不存在使得

D. 的最小值为

【答案】ABD

【解析】

【分析】利用线面平行及三棱锥体积公式可判定A，利用正四棱锥的特征及球的表面积公式可判定B，利用空间向量研究空间位置关系可判定C，构造对称点转化为平面中定点到定直线的距离最值问题，解三角形计算即可判定D.

【详解】

对于A项，如上图所示连接，当时是的中点，易知为的中点，

所以中，，

又平面，平面，所以平面，

因为，则到平面的距离即到平面距离，

显然三棱锥的底面积是定值，且顶点到底面的距离也是定值，

故A正确；



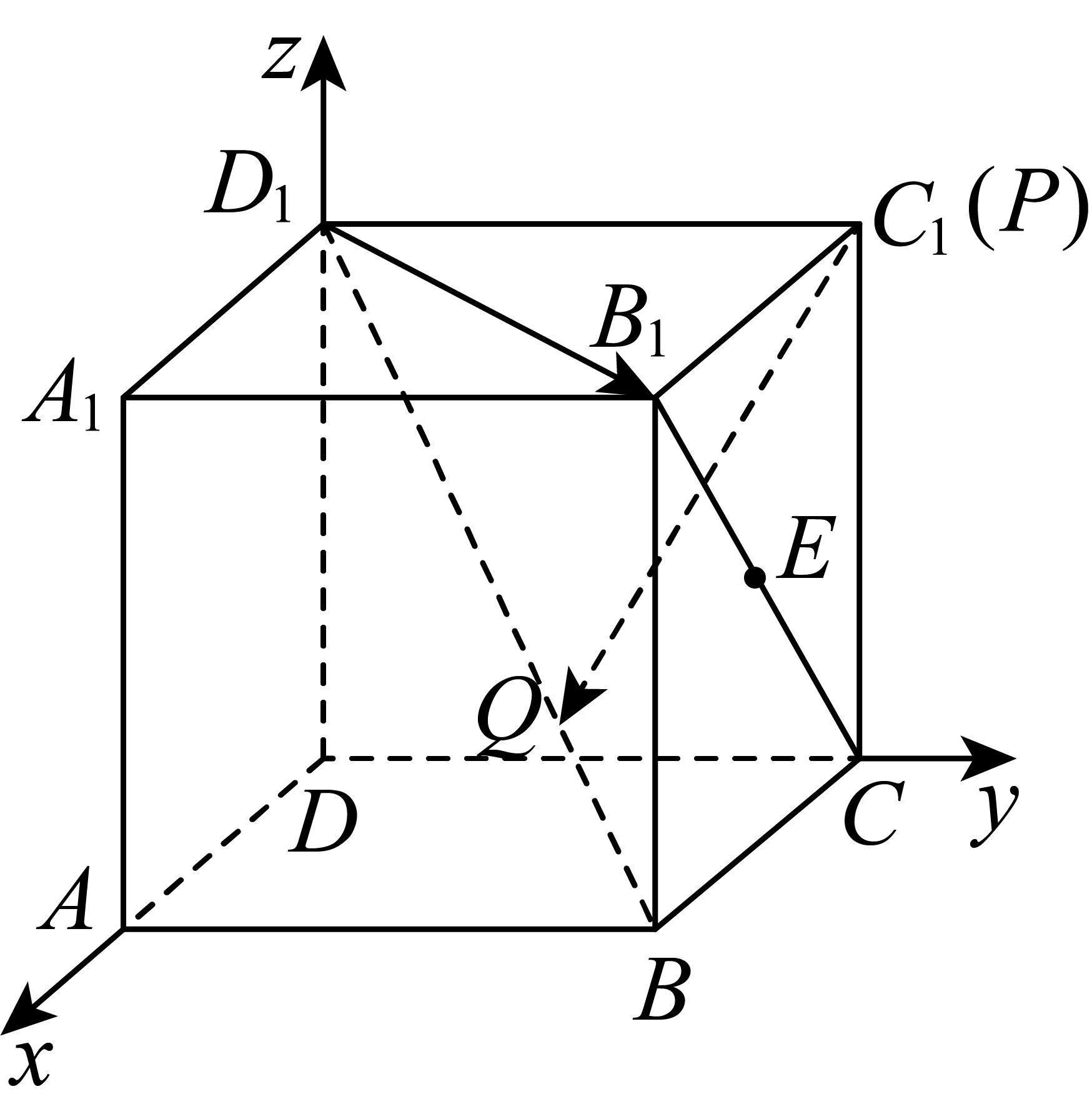
对于B项，如上图所示，连接交于点，

当时，易知四棱锥为正四棱锥，，

可知其外接球球心在直线上，

设，外接球半径为*R*，则，

解之得，所以其外接球的表面积为，故B正确；



对于C项，如图所示建立空间直角坐标系，当时，*P*与重合，

易知，

则，

所以，，

则，符合前提条件，故存在使得，故C错误；



对于D项，易知点三点在平面上，如图所示沿着翻折得，

*E*点对应，过作，垂足为*P*，交于*Q*，

可知，设，作交于，

易知为的中点且，，

易得，所以，

由梯形中位线可知：，

易知此时，故D正确.

故选：ABD

【点睛】方法点睛：A项可通过线面平行得点面距离为定值判定即可，B项可根据正四棱锥、球体的特征及勾股定理计算即可，C项可直接建立空间直角坐标系利用空间向量计算即可，也可利用正方体体对角线的特征即平面直接判定，D项转化为平面中点线距离最值问题，利用相似三角形线段比例关系计算即可.

**三、填空题（本题共4小题，每小题5分，共20分）**

13. 双曲线的渐近线方程为\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】利用双曲线的性质即可求得渐近线方程.

【详解】由双曲线的相关知识可知：，

所以焦点在轴双曲线的渐近线方程为：

故答案为：

14. 的展开式中常数项为\_\_\_\_\_\_.

【答案】25

【解析】

【分析】求得展开式中的常数项和项的系数后由多项式乘法法则可得，

【详解】中常数项为1，项为，

因此所求常数项为．

故答案为：25.

15. 已知非零向量，夹角为，则的最小值为\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】根据向量数量积的运算，结合二次函数求最值得解.

【详解】因为非零向量与的夹角为，所以，

，

令，，

则，当且仅当即时等号成立.

故答案为：.

16. 已知实数，分别满足，，其中是自然对数的底数，则\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】方程变形为，令换元后利用函数的性质得出，从而可求解．

【详解】由得，令，则方程化为，

设，则，易知时，，递减，时，，递增，

而时，，因此时，，

又，因此，且，

∴，

故答案为：．

【点睛】方法点睛：两个变量在两个不同的方程中，本题方法是利用换元法，把两个方程化为同一种形式，然后结合函数的单调性得出变量的关系．

**四、解答题（本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）**

17. 已知在等差数列中，，，是数列的前项和，且满足.

（1）求数列和的通项公式；

（2）设，求数列的前项和.

【答案】（1）；，

（2）

【解析】

【分析】（1）根据等差数列的基本量计算可得，根据前项和和通项的关系及等比数列的定义与通项公式计算可得；

（2）利用错位相减法求和即可.

【小问1详解】

设的公差为，由题意得

；

当时，则，，

当时，则，，，

是以1为首项，3为公比的等比数列，

；

【小问2详解】

由（1）得，

，①

，②

①－②得，

.

18. 在中，，，分别为内角的对边，点在线段上，，，的面积为.

（1）当，且时，求；

（2）当，且时，求的周长.

【答案】（1）

（2）.

【解析】

【分析】（1）利用三角形的面积公式及余弦定理计算即可；

（2）利用三角形中线的向量性质与数量积公式、三角形面积公式及余弦定理计算即可.

【小问1详解】

由题意得，，

，，，

，，

，

，；

【小问2详解】

由题意得，，

，

，，

，，

，

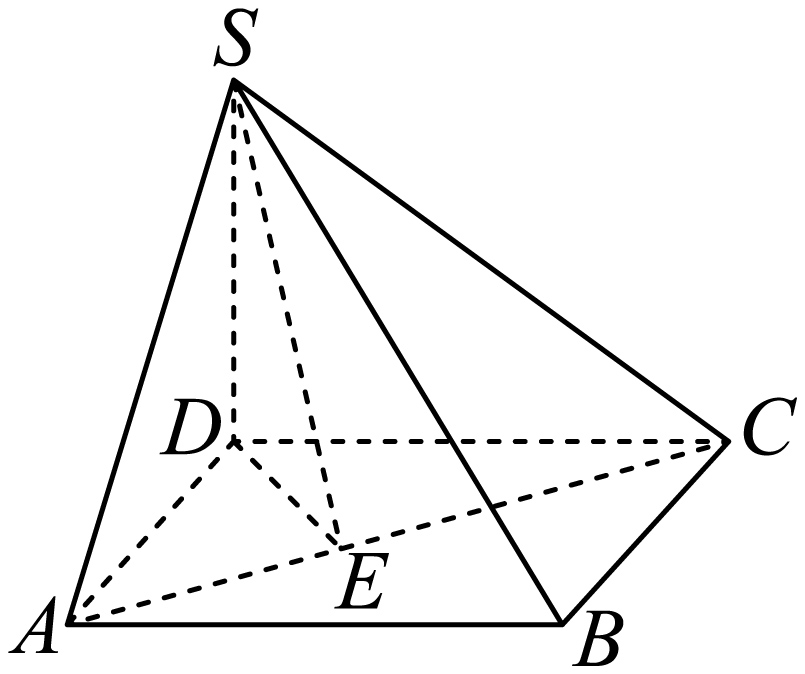
，，

，，

，

的周长为.

19. “阳马”是我国古代数学名著《九章算术》中《商功》章节研究的一种几何体，即其底面为矩形，一条侧棱垂直于底面的四棱锥.如图，四棱锥中，四边形是边长为3的正方形，，，.



（1）证明：四棱锥是一个“阳马”；

（2）已知点在线段上，且，若二面角的余弦值为，求直线与底面所成角的正切值.

【答案】（1）证明见解析;

（2）.

【解析】

【分析】（1）借助线面垂直的相关知识证明即可.

（2）建立空间直角坐标系，求出平面与平面的法向量，利用二面角为计算出，进而求出线面角的正切值.

【小问1详解】

四边形是正方形，，

，，平面，

平面，

平面，，

四边形是正方形，，

，，平面.

平面，

平面，，

，平面，

平面，

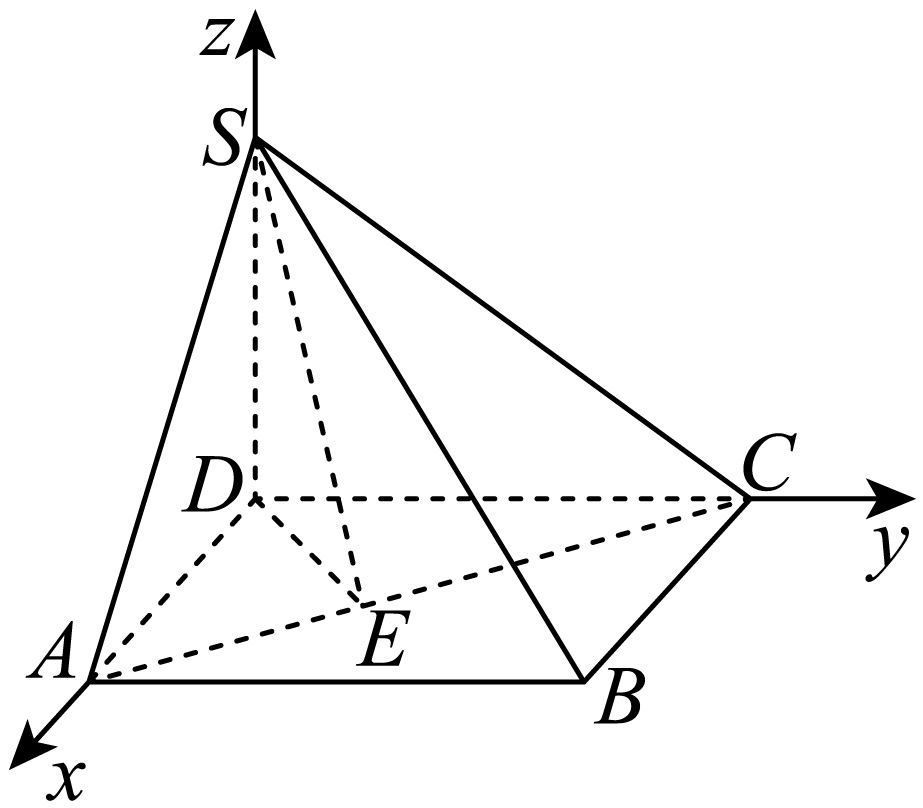
四棱锥是一个“阳马”；

【小问2详解】

由（1）得平面，，

，，，

以点为原点，，，所在的直线分别为轴，轴，轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



由题意可得，，，，，

所以，

设，，

，，

，，

设是平面的一个法向量，则，

，令，则，，

设是平面的一个法向量，则，

，令，则，，

，或（舍去）.

，，

平面，直线与底面所成角的正切值为.

20. 为了避免就餐聚集和减少排队时间，某校食堂从开学第1天起，每餐只推出即点即取的米饭套餐和面食套餐.某同学每天中午都会在食堂提供的两种套餐中选择一种套餐，如果他第1天选择了米饭套餐，那么第2天选择米饭套餐的概率为；如果他第1天选择了面食套餐，那么第2天选择米饭套餐的概率为.已知他开学第1天中午选择米饭套餐的概率为.

（1）求该同学开学第2天中午选择米饭套餐的概率；

（2）记该同学第天选择米饭套餐的概率为，

（i）证明：为等比数列；

（ii）证明：当时，.

【答案】（1）

（2）（i）证明见解析；（ii）证明见解析

【解析】

【分析】（1）由对立事件概率、条件概率公式以及全概率公式即可得解.

（2）由对立事件概率、条件概率公式以及全概率公式首先得递推公式，（i）由等比数列定义证明即可；（ii）当时，结合单调性分奇偶讨论即可证明.

【小问1详解】

设“第天选择米饭套餐”，则“第天选择面食套餐”，

根据题意，，，，

由全概率公式，得

；

【小问2详解】

（i）设“第天选择米饭套餐”，

则，，，，

由全概率公式，得，

即，，

，是以为首项，为公比的等比数列；

（ii）由（i）可得，

当为大于1的奇数时，；

当为正偶数时，.

21. 已知抛物线的准线与轴相交于点，过抛物线焦点的直线与相交于两点，面积的最小值为4.

（1）求抛物线的方程；

（2）若过点的动直线交于，两点，试问抛物线上是否存在定点，使得对任意的直线，都有.若存在，求出点的坐标；若不存在，则说明理由.

【答案】（1）

（2）存在定点；理由见解析

【解析】

【分析】（1）设直线的方程为，联立方程组得到，求得，进而求得的值，得到抛物线；

（2）假设存在定点，设直线的方程为，联立方程组，由韦达定理，得到，，结合，求得点的坐标.

【小问1详解】

由抛物线，可得，准线为，则，

易知直线斜率不为零，设直线的方程为，且，

联立方程组，整理得，

则，且，

可得，

所以面积，

当时，取最小值，

因为面积的最小值为，所以，解得，

所以抛物线的方程为.

【小问2详解】

由（1）知抛物线，假设存在定点，易知直线的斜率不为零，

设直线方程为，且，，则，，

联立方程组，整理得，

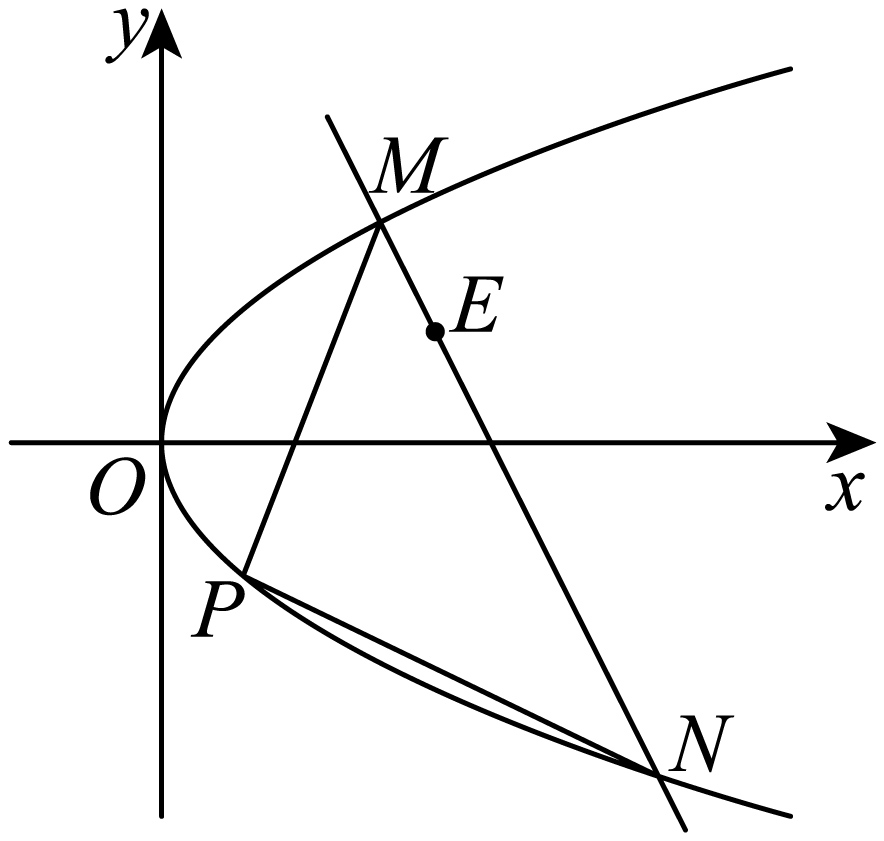
则，且，，

因为，可得，

因为，

所以，即，

当时，即时，恒成立，所以存在定点.

.

【点睛】方法点睛：利用韦达定理法解决直线与圆锥曲线相交问题的基本步骤如下：

（1）设直线方程，设交点坐标为；

（2）联立直线与圆锥曲线的方程，得到关于（或）的一元二次方程，注意的判断；

（3）列出韦达定理；

（4）将所求问题或题中的关系转化为、（或、）的形式；

（5）代入韦达定理求解.

22. 已知函数，.

（1）当时，求的最小值；

（2）当时，不等式恒成立，求实数取得的最大整数值.

【答案】22. 最小值

23 3

【解析】

【分析】（1）求导得函数单调性，根据函数单调性与最值的关系即可求解.

（2）对是否等于1分类讨论，当时，结合函数极值点满足的条件以及零点存在定理即可求解.

【小问1详解】

当时，，，则，

令，则；令，则，

在上单调递减，在上单调递增，

在处取得最小值.

【小问2详解】

①当时，则，显然成立；

②当时，原不等式等价于，

令，，则，

令，，则，在上单调递增，

，，

，，即，，

当时，，，在上单调递减，

当时，，，在上单调递增，

在处取得最小值为，

，且，

综上，实数的最大整数值为3.

【点睛】关键点睛：第二问的关键是结合极值与极值点满足的关系即可顺利得解.